

从数学家的夙愿到人生终活

广中平祐（1931 年 4 月 9 日—2026 年 3 月 18 日）

讲座信息

地点：京都大学理学研究科 6 号馆 401 室（2016 年 11 月 19 日）

摄影：河野裕明

内容：本讲座记录由编辑部将录音转写成文字后，再由广中先生整理编成。附 AMS 访谈录，载于《NOTICES OF THE AMS》第 52 卷。



简介

广中平祐（日文：広中平祐/ひろなかへいすけ，罗马化：Hironaka Heisuke）是二十世纪顶尖的代数几何学家之一。他最著名的成就是 1964 年在特征零域上代数簇的奇点解消问题上的研究，并凭借这一成果于 1970 年获得菲尔兹奖。这一问题的基础性早在二十世纪上半叶就已被众多数学家所认识，其中奥斯卡·扎里斯基的影响尤为深远——他解决了曲线和曲面的奇点解消问题，并对广中平祐产生了深刻启发。广中平祐采用了极具独创性的方法，创造了新的代数工具并改良了现有工具以适配该问题。这些工具后来被证明在解决许多与奇点解消毫无关联的其他问题时同样有效。另一位对他影响深远的学者是亚历山大·格罗滕迪克，1959 年，格罗滕迪克首次邀请年轻的广中平祐访问巴黎高等科学研究所（IHÉS），此后广中平祐多次造访该机构。2002 年，为促进 IHÉS 与日本数学家之间的交流，“广中平祐基金”成立，IHÉS 教授米哈伊尔·格罗莫夫在相关新闻稿中评价道：“广中平祐的奇点解消理论在数学史上是独一无二的。它是世界上最困难的数学成果之一，至今仍未被超越或简化。”



广中平祐于 1931 年 4 月 9 日出生在日本山口县。在京都大学求学期间，他加入了秋月康夫主导的学术团体，秋月康夫是日本现代代数的先驱。1960 年，广中平祐在扎里斯基的指导下获得哈佛大学博士学位。先后在布兰代斯大学、哥伦比亚大学任职后，他于 1968 年成为哈佛大学教授，并在 1975 年至 1988 年间同时担任京都大学教授。1983 年至 1985 年，他担任京都大学数学科学研究所所长。1970 年，他获得日本学士院奖；1975 年，被授予日本政府文化勋章。广中平祐在日本享有的声誉和尊崇，对西方人来说颇为罕见——即便是没有多少数学或科学背景的日本普通人，也大概率听过他的名字。

广中平祐投入了大量时间和精力鼓励对数学感兴趣的年轻人。1980 年，他发起了面向日本高中生的暑期研讨会，后来又增设了面向日美大学生的研讨会；这些研讨会在他的主导下持续了二十余年，至今仍在举办。为支持研讨会的运营，他于 1984 年成立了慈善基金会“日本数学科学协会”，该协会还为日本学生提供海外博士深造奖学金。1996 年至 2002 年，广中平祐担任故乡山口县的山口大学校长，2003 年任创造学园大学（于 2004 年开学）首任校长，直到晚年，仍在继续教育相关活动（尤其侧重于地方层面），同时坚持数学研究，本文为广中先生最后一次演讲。¹

目录

1 引言	3
1.1 生者必有死	3
1.2 人生本就不简单	4
2 我的成长经历	4
2.1 基因与环境因子	5
2.2 中学时代的空袭经历	5
2.3 我的父母	6
2.4 兄长们的战死	7
2.5 兄弟姐妹多是件幸事	7
2.6 考入京都大学	8
2.7 入学成绩差，也能练就才能	8
3 数学家的夙愿	8
3.1 秋月先生与代数几何研究小组	8
3.2 与奥斯卡·扎里斯基的相遇	9
3.3 获富布赖特奖学金，远赴美国	9
3.4 日本人的过人之处	10
3.5 奇点解消问题	11
3.6 扎里斯基的四位弟子	11
3.7 与格罗滕迪克的相遇	12
3.8 在巴黎的日子	12

¹与众多研究领域涉及到代数几何的数学工作者一样，尽管整理者在学术工作中频繁引用“Hironaka’s resolution of singularities”（广中奇点解消定理），却始终未曾读过证明。广中平祐先生是真正的学术大师。整理访谈录，仅为表达对先生的追思。

1 引言	3
4 作为研究者的岁月	12
4.1 任职布兰代斯大学	12
4.2 经哥伦比亚大学,任哈佛大学教授	13
4.3 想教出懂事的孩子,就先过苦日子	13
4.4 与小泽征尔的相遇	14
4.5 推举扎里斯基为名誉教授	14
5 献给妻子的最精彩的论文	15
5.1 我那特别的才能	15
5.2 人老了,本性依旧	15
5.2.1 记忆力	15
5.2.2 爆发力	15
5.3 没有持久力,也能找到研究的乐趣	16
5.4 金婚纪念日的誓言	16
5.5 抽象代数的妙处	16
5.5.1 凡事皆有二种可能	17
5.5.2 瑟斯顿的视觉天赋	17
5.5.3 代数的奇妙特性	17
5.6 献给妻子的论文	17
5.6.1 极大接触	17
5.6.2 与有限生成代数等价	17
5.6.3 微分积	18
5.6.4 抬升与降指数	18
6 数学是抽象的学问	19
6.1 何为有用?	19
6.2 数学的乐趣,无关年龄	19
7 人生收尾	19
A 美国数学会《通讯》访谈编辑稿	20
A.1 家庭与童年	20
A.2 哈佛求学与扎里斯基门下	22
A.3 奇点解消问题	22
A.4 从美国回到日本	26
A.5 数学教育与基金会	26
A.6 为什么做数学?	27

1 引言

1.1 生者必有死

我今年 85 岁,马上就要 86 岁了。我想,大家到了这个年纪就会明白,实在不想再做那些没意义的事了(听众大笑)。众所周知,“生者必有死”,死亡是注定的事。所以,我早已将死亡纳入考量,

余生或许还有 5 年，也可能只有 2 年、3 年，运气好的话或许有 10 年，但死亡终究会到来。正因如此，我不想再为了讨别人欢心、博取他人敬佩而做事。

大家不妨想想，年轻的时候，我也曾费尽心思，一心想早点从助教授升为教授。但现在哪还有这种心思？在座的 85 岁以上的各位，请举手看看（听众大笑）。到了这把年纪，还想要这些吗？还愿意为了这些费心吗？除非是个怪人，否则绝不会这样（听众大笑）。

1.2 人生本就不简单

我十分尊敬小平邦彦先生，承蒙他诸多关照，也受他悉心指导。这份指导不仅关乎数学专业，他还曾教我该如何在美国度过人生。此外，伊藤清先生当时恰巧在麻省理工学院担任教授，我在哈佛大学求学时，也承蒙他诸多教诲。我曾问他：“该做什么样的研究才好？”他告诉我：“不管怎样，先做自己力所能及的事，再做别人没做过的事，这样你自然能闯出一番天地。”我深以为然。

要是有人觉得听了我的话就能变得更聪明，那这人实在太笨了。人生从不是这么简单的事。

说来也怪，人总会在不经意间被别人的话影响。有时当下觉得“这话听着毫无意义”，可过了几年，却会懊悔“当时怎么就没认真听听呢”。

我的专业是代数几何。曾有一位名叫安德烈·韦伊的学者来到我的研究室，对我说：“你研究特征 0 的问题也就罢了，一定要把研究延伸到特征 p 的领域。”我当时满心疑惑，还找了各种借口推脱，心里甚至想着“这人到底在说什么”。可如今回想起来，只觉得当初要是好好听他的话就好了，要是再多用心琢磨一下就好了，他的话或许藏着深意。

没过多久，一位名叫盖尔范德的俄罗斯教授在晚年来到美国，他说：“我想和你见一面，聊一聊。”我答应后，便和他见了面。当时我正专注于奇点解消的研究，他对我说：“请你研究特征 p 下的奇点解消问题，说实话，这个研究会有很大的用处。”可那时的我忙得不可开交，根本没心思特意去见人、听人说话。我还想着，有阿比扬卡一直在潜心研究特征 p 的问题，这事交给他就好，根本轮不到我。

可等我到了耄耋之年再回头看，才发现这个问题其实十分有趣。比如结合计算机软件推导求根公式的问题、与希尔伯特第五问题相关的问题等等，思绪一展开，便有无穷的遐想。这些我后面会细说，可我至今仍后悔，当初为何没有认真听听这位先生的话。如今，这两位前辈都已离世，没能聆听他们的教诲，成了我莫大的遗憾。

2 我的成长经历



换个话题，简单做个自我介绍吧。这张照片看似普通，可照片里被母亲抱着的那个可爱小男孩，就是 85 年前的我。

没想到 85 年前的自己，竟然这么可爱。就给大家看这么几秒（听众大笑）。

2.1 基因与环境因子

人从出生起，便继承了各种各样的基因。这些基因中，有的会在人生中发挥重要作用，有的则毫无存在感，而人终究会在某个年纪走向死亡。人生并非由基因单独决定，成长的环境、人生路上遇到的人、听到的话，或是身处顺境、或是遭遇磨难，这些经历都会让人有所感悟、有所成长。

我把这些影响人生的外部因素称作“环境因子”。和基因一样，“环境因子”也在塑造着人的一生，人正是在基因与环境因子的共同作用下，走出属于自己的人生。我想聊聊自己的“环境因子”，虽说一直说自己的事可能会让大家觉得无聊，大家要是不想听，随时可以离开（听众大笑）。

2.2 中学时代的空袭经历

我成长环境的一个重要印记，便是二战。我初二那年战争结束，而从初一下半学期到初二，我被迫在一家名为光工厂的地方做工，那里是制造人操鱼雷的工厂。战争末期，工厂遭遇了猛烈的轰炸，和我一起躲进防空壕的一位同学不幸遇难，而我只是受了伤，断了一条腿。

那时，我们总在练习如何从厂区撤离。空袭来临前，会有警报声响起。可大家都觉得麻烦，不想跑到山里，便找地方躲起来。可遭遇轰炸的那天，没有任何警报，大家却都从窗户里冲了出去。这是因为美军的战术十分高明，他们会先用高射炮发起第一轮攻击，彻底压制地面的反击。等到地面彻底没了声响，只有空中传来轰鸣声时，炸弹就快要落下了。炸弹坠落时会有呼啸声，一旦听到这声音，所有人都会一言不发地从窗户冲出，躲进附近的防空壕。

说点题外话，倾听长辈的话十分重要——这里的“长辈”，对大家来说，就是五六十岁的人。不必事事遵从，只需认真倾听就好。这样的话，或许一生只会遇到一两次，但有时会起到至关重要的作用。我能在防空壕里活下来，多亏了一位长辈的提醒。

到了战争末期，美军的轰炸愈发精准，他们会先投下炸弹，将整片建筑夷为平地。被直接击中的地方，有三四名初中的学长当场惨死。我所在的防空壕地基剧烈摇晃，沙土从天花板不断掉落，壕里积满了沙土，好在没有被直接击中，我捡回了一条命。空袭暂时平息后，我一心想逃，觉得待在这里太煎熬了，可正要跑时，却被守在防空壕入口的一位大人叫住：“等一等。”我只好按捺住心思，原地等待。没过多久，新一轮的猛烈轰炸便来了。现在想来，幸好当时没有贸然逃跑。轰炸再次平息，四周恢复安静，我又说：“快逃吧，快逃吧。”可那位大人又说：“再等等！”这样的情况一共发生了三次，直到第三次轰炸的声音彻底消失，他才说：“就是现在！”

我们立刻冲出防空壕，一心想渡河逃生。渡河时，有一位同学受了伤，我心里其实想过丢下他自己跑，可在那样的场景下，心里总会生出别样的情绪，觉得无论如何都要带他一起走，最后还是扶着他过了河。

渡过河后，我们看到了一家医院。受伤的同学腿伤严重，我们便扶着他进去。医院里的医生是军医，他看了看我，说：“你比你扶来的这个人抖得还厉害。”这也难怪，我虽然没受什么伤，却被吓得魂飞魄散。我本以为他会先给我看看，可他根本没理会我。外面的士兵们，原本还在外面操作高射炮反击，到了最后，却成了美军战机机枪扫射的活靶子。对美军的飞行员来说，这或许就像一场游戏吧，因为地面上的我们毫无反抗之力。

我们在医院里，看着军医对护士说着：“这人没救了，让他去吧。”“这人也活不成了，别管了。”“这人还有救，赶紧治。”眼前的伤兵疼得嘶吼挣扎，军医却轻描淡写地说着“没救了”。或许医生的直觉真的很准，一眼就能判断生死。我们当时还觉得，伤兵喊得那么大声，明明还很有精神，可事实证明，我们大错特错，就算想救，也回天乏术。

我们在医院里根本没人理会，无奈之下，只好往车站跑，一心只想早点回家，最后还是丢下了那位受伤的同学。可他后来也回了家，却因为伤口感染引发破伤风，最终还是走了。到头来，我们躲进的那座防空壕里，还是有一人遇难。

2.3 我的父母



这张照片里，站在中间、摆着一副神气模样的孩子，就是我。

上小学之前，我从没上过学。上学时，家人还特意为我做了新衣服，我突然觉得自己变得聪明了，便站在了队伍的中间。我有两个哥哥，就是照片里那两个高个子的男孩。

母亲抱着一个年幼的孩子。母亲的第一任丈夫是银行职员，身患肺结核，可母亲还是怀上了孩子。我一直很佩服母亲，竟然没有被传染肺结核。后来，他们回到了爷爷奶奶家，因为在那个年代，肺结核是让人闻之色变的不治之症。乡下有一所疗养院，就建在火葬场旁边，得了肺结核的人，都会被送进那里。研究医学的老一辈人，或许会知道那个年代的事。

母亲想带着丈夫回到娘家，却遭到了拒绝。爷爷奶奶心疼母亲，便在深山里盖了一间小木屋，让母亲和她身患肺结核的丈夫住在那里，还会时不时给他们送些食物。

后来，母亲的第一任丈夫还是病逝了，他们留下了一个儿子，也就是我的同母异父的哥哥，他名叫水户，并不姓广中。

母亲的姐姐，也就是我的姨妈，嫁给了我的父亲，两人育有四个孩子，其中两个是男孩。父亲对这两个儿子寄予厚望，送大儿子去了名古屋的工业专科学校，送二儿子去了商业专科学校。他特意把孩子送到名古屋读书，一心想让他们继承家业。可不幸的是，姨妈患上癌症去世了。

那时，母亲带着一个儿子，成了寡妇；父亲带着四个孩子，也成了鳏夫。镇上的人见状，便劝道：“你们俩都失去了伴侣，不如在一起吧。”就这样，我的父母走到了一起，婚后又生了十个孩子。

研究医学的各位，能解释这件事吗？母亲的第一任丈夫因肺结核去世，她在深山里过着与世隔绝的生活，还怀了孕，却没有染上肺结核。后来嫁给我的父亲，又生了十个孩子。这在医学上该如何解释呢（听众大笑）？所以说，人终究是有基因的，有些人天生就对某些疾病有抵抗力。

2.4 兄长们的战死

我的大哥，是父亲与姨妈的长子，23岁时在新几内亚与美军作战，壮烈牺牲。我年纪大了之后，才渐渐听到了当时的种种细节，每次想起，都心如刀绞。

听说美军的士兵只要抱怨一句“想喝热汤”，后方就会立刻把热汤送过来。而日本的士兵就算喊着“快送武器来，快送粮食来”，得到的回应也只有“什么都没有”。士兵们本以为会有援军到来，可最终等来的，只有一纸电报，上面写着“死守阵地”，说白了，就是“战死沙场”。日军就是这样把士兵推向死亡的，所以我从不想去靖国神社。我不知道外国人不愿去的原因，但作为日本人，我打心底里抗拒。

我的二哥被派往北京，作战时受了重伤，被送进北京的医院，最终在22岁那年离世。

现在想来，实在太荒唐了。士兵接到征兵令后，连基本的训练都没有，就被直接送上了最前线，还被要求“死守”。天底下哪有这样的道理？以前，士兵会在广岛的练兵场接受两年左右的严格训练，之后才会被派往战场。可那时，士兵们连训练都没有，就被直接送到了新几内亚。下达这个命令的，还是身在日本的日本人。这简直是天大的笑话，实在太荒唐了。世人总说日本人如何如何，可每当想起这件事，我就满心愤懑，无比难受。

2.5 兄弟姐妹多是件幸事

不管怎样，我们家最后一共有15个孩子。孩子多其实是件好事，对父母来说也轻松不少，因为孩子们根本不用父母操心，自己就能好好长大。兄弟姐妹之间难免会吵架，可要是妹妹在学校被欺负了，哥哥们都会立刻站出来，找对方理论。这样的相处，让我们兄弟姐妹之间生出了强烈的凝聚力。孩子多了，父母反而省心，而且孩子其实很好养活，就算吃得不好，也能健康长大。

有人总说营养如何如何重要，可在我们家，这话根本不成立，不然我们这15个兄弟姐妹，个个都该是笨蛋了。

广中家的两位兄长战死后，上初二的我成了家里的长子。母亲曾说：“两个儿子战死沙场，已是无法挽回的事，剩下的孩子，还有战后出生的孩子，我一个都不会再让他们出事。”

我担任山口大学校长时，山口市的相关人士曾来找我，说：“想请你拍个宣传片。”我问拍什么，他们说：“你兄弟姐妹这么多，最后还当上了山口大学校长，想借着你的例子宣传一下，鼓励大家多生孩子，说不定家里就能出一个山口大学校长呢（听众大笑）。”他们是认真的，可我还是拒绝了。

我们家 15 个兄弟姐妹站在一起，场面十分壮观。如今，年纪最大的姐姐已经快 100 岁了，依然健在。所以说，生为女人，或许是件幸事，若是生为男人，说不定早就死在战场上——除非是精通战术的军人。我的两位兄长，就是最好的例子。

父亲在两个儿子战死后，一蹶不振，满心的期望落空，整个人都垮了。也正因如此，还是中学生的我，不管想做什么，父亲都不再干涉，任由我自己做主。

2.6 考入京都大学

我一心想上大学，便报考了京都大学，最后侥幸考上了。父亲给了我 5000 日元，在那个年代，5000 日元不是小数目，想来父亲也是费尽了心思。他对我说：“拿着这笔钱，读完大学就回来。”可这 5000 日元，我一年就花光了，毕竟还要交学费。

我的弟弟考上了信州大学，而他小的弟弟，最终没能上大学。弟弟曾给父亲写信，说：“在这里连饭都吃不饱，日子实在太难了。”他本以为父亲会寄钱过来，可等来的却是一封父亲写的诗信，里面写着“人活着，并非只为了吃饭”。弟弟无奈，只好又写信诉苦：“可没饭吃，根本活不下去啊。”那时我在京都大学，已经能靠做些兼职赚点钱了，便时不时给弟弟寄些零花钱，毕竟不能看着他饿死。

父亲是商人，我也从他那里学到了些赚钱的法子，这些兼职帮了我大忙。考上京都大学研究生院后，我光靠兼职的收入，就比得上助教授的薪水了，还能时不时给父亲寄些钱。毕竟家里还有弟弟要照顾，那个年代的生活，就是这样。

2.7 入学成绩差，也能练就才能

因为家里没钱，我向京都大学的育英会申请了奖学金。面试时，评审的教授们看着我的资料，说：“入学考试的成绩，确实不太理想啊。”

我对他们说：“这个世界上，到处都藏着有才能的种子。我老家的小镇，这么多年来，只出过两个大学生，一个是神社住持的儿子，一个是医生的儿子，其他人都没机会上大学。而且我赶上了战后的年代，国立大学突然大量扩招，乡下人也能考上大学，成为大学生，所有人都为此欢欣鼓舞。我觉得，这对日本的战后复兴，起到了至关重要的作用。现在总有人议论大学的好坏，用各种标准评判大学的优劣，可在那个年代，只要能成为大学生，就足以改变一个人的人生，让无数年轻人的人生观发生翻天覆地的变化。对乡下的孩子来说，那是一个重大的转折点。”

我还说：“我们高中，只考上了两个帝国大学的学生，而且都是京都大学。学校里的学生很多，那个年代家家户户孩子都多，可最终只有我们两个考上了。大家不妨想想，这不是才能的问题，只是我的考试成绩不好而已，我是有才能的（听众大笑）。”

我的话让评审的教授们笑了起来，他们说：“好吧，那就给你奖学金吧。”最终，我成功拿到了育英会的奖学金，一年一万日元，在当时，这可是一笔巨款，帮了我大忙。后来，我也把这笔奖学金还了回去。

3 数学家的夙愿

3.1 秋月先生与代数几何研究小组

人生处处有偶然，偶然有时会带来好运，有时也会带来不幸。

考上京都大学后，我觉得自己运气极好，因为遇到了秋月康夫先生。或许有人还记得他，秋月先生是位看似严厉的老师，性格直爽，要是门没开，他会直接一脚踹开。但他对学问有着无比炽热的情，而且十分惜才，不管是谁，只要有才能，他都会倾力培养。他从东京大学请来井草准一，让他担任京都大学的助教授；又从名古屋大学请来永田雅宜，让他担任讲师；对自己的得意门生，他也会送他们去美国深造。他一心想在京都大学，打造出一个良好的学术氛围。

那时，京都大学数学系只有三位教授，秋月先生为了请冈洁担任教授，费了不少心思，还特意给冈洁安排了系列讲座，我也去听了。冈洁先生确实与众不同，可不知为何，最终没能成为京都大学的教授。即便如此，秋月先生还是尽力帮他，让他成了奈良女子大学的教授，想来其中也有不少波折。

在我看来，秋月先生是个看似严厉，实则无比优秀的人。那时的大学教授，个个都认真又聪明，却大多不苟言笑，只有秋月先生与众不同。了解他的人，想必都记得他的样子。正是秋月先生，创立了京都大学的代数几何研究小组。

我大三那年，加入了这个秋月研究小组，是小组里最年轻的学生。当时，井草准一已经离开，不少优秀的学者也去了美国，比如松阪茂，也远赴美国的大学任教。小组里还有中井喜孝先生，他后来成了大阪大学的教授，还有一位西先生，年纪稍轻，当时好像是助教，他们都对我十分关照，悉心指导。正因如此，我遇到了许多幸事，这些幸运，远超我的想象。

3.2 与奥斯卡·扎里斯基的相遇

这张照片里的人，是奥斯卡·扎里斯基，哈佛大学的教授。他的妻子名叫约莱，照片里没有拍到她，年轻时的她是位大美人，是意大利人。扎里斯基出生于俄罗斯，在意大利生活过一段时间，之后便和妻子一起去了美国。

他曾在京都大学做了三个月的讲座，这都是秋月先生努力的结果。

扎里斯基教授曾问我：“你现在在做什么研究？”那时我才大三，想尽力向他解释，可英语说得太差，半天说不清楚，只能皱着眉听他说话。好在我还能写出方程式，中井先生等前辈见状，便帮我解释：“广中想表达的，是这个意思。”永田先生也十分热心，帮了我不少忙。也正因如此，扎里斯基教授对我说：“广中，要不要去哈佛大学留学深造？”我立刻回答：“当然想去！”

可在那个年代，1美元能兑换360日元，而且国家规定，个人最多只能兑换15000日元的美，除非是特别有钱的人，才能通过特殊渠道兑换，可我根本没这个条件。那时的我，根本没机会去哈佛大学。更何况，两个哥哥已经战死，家里还有8个弟弟妹妹要照顾，我根本走不开。



3.3 获富布赖特奖学金，远赴美国

我本以为去美国留学是不可能的事，可有人劝我：“试试申请富布赖特奖学金吧。”我便试了试，没想到富布赖特奖学金的选拔，还有英语口语。

口试的第一个问题是：“What is your hobby? (你的爱好是什么?)”我大三前已经读了好几篇英语的数学论文，可“hobby”这个词，我听都没听过(听众大笑)。我答不上来，只能一言不发。考官说：“面试结束了。”我心想，算了，不去美国也罢，就算留在日本，就算当不上大学教授，当个高中老师总还是可以的，我有这个实力。

我年轻的时候，因为是家里的长子，难免有些自负。或许是因为要带着弟弟妹妹们长大，这种优越感，也成了我前进的动力。

我本以为赴美留学的事，就这样彻底黄了，可没想到，富布赖特委员会给我寄来了信，信中说，我虽然口试没通过，但他们觉得我或许有数学方面的才能，愿意给我一个条件录取的机会。那时，数学系申请富布赖特奖学金的人很少，或许他们也是想给数学系的学生一个机会吧。

委员会要求我，在一个半月或是两个月内，跟着母语是英语的老师练习口语，拿到学习证明，之后就能获得奖学金。

我立刻开始寻找英语老师，恰巧有一位美国的老太太住在附近的寺庙里，她愿意每天教我英语。最终，我顺利拿到了学习证明，凭借富布赖特奖学金，登上了冰川丸号客轮，远赴美国。

那时，根本没有随身听之类的学习工具，能有这样的机会，已经十分不易。扎里斯基教授还对我说，只要我能靠着富布赖特奖学金来美国，他会为我申请每月 400 美元的研究经费。在我看来，400 美元已是一笔巨款，可在当时的哈佛大学学生眼里，这钱并不算多。



哈佛大学宿舍，1957

3.4 日本人的过人之处

我想说说日本人的特点。美国和欧洲的天才学者，总能快速想出新奇的点子，发现新的研究方向，然后不断深入研究，等这个方向研究透了，就立刻转向新的领域。世人都觉得，能做到三次这样的突破，就是真正的天才。直到现在，还是如此，比如美国，总有人一心想早点拿到诺贝尔奖，一旦有了新发现，就立刻给《纽约时报》打电话，急于公布成果，连论文发表都等不及，一心想争第一，想站在最前沿。这种“争第一、抢头功”的意识，是欧美天才学者的优点，但在我看来，这也藏着不小的缺点。

日本人从来都不是这样的。可现在的年轻人，不知不觉间受到了欧美人的影响，也开始追求“快”和“新”，一心想做最前沿的研究，想让别人刮目相看。在我看来，天生的天才或许可以这样，但对大多数人来说，这样做只会得不偿失。人生很长，说不定能活到 85 岁，为了追求一时的领先，耗费自己的精力，实在不值。我可以断言，那些急于求成、想让人生快进的人，到了 80 多岁，一定会后悔。我今天说这些，就是想把这个道理告诉大家，我绝非在开玩笑。

日本人的过人之处，在于“忍耐力”。不一定要争第一，做第二、第三也无妨，能做到世界第三，难道不是一件很了不起的事吗？别再说什么“没拿到金牌，太遗憾了”，就算拿到铜牌，甚至是第四名，那也是在世界范围内的成绩，难道不值得骄傲吗？这对自己的人生来说，已是莫大的幸福。就算没人称赞，自己也能肯定自己，这就够了。

我们应该发挥日本人的这种特性。我不算聪明，但我觉得自己充分发挥了日本人的特质。我 30 岁时在哈佛大学拿到了数学博士学位，而有的人 20 岁就拿到了博士学位，还有人 20 岁就成了麻省理工学院的副教授。这些人头脑聪明，研究也十分成功，是真正的天才和精英。他们曾对我说：“你

看起来也不笨，怎么这么晚才拿到博士学位？”我一时不知如何回答，便随口扯了个谎：“我之前一直在研究哲学。”但其实，我也在另一种意义上思考着“哲学”——关于人生的哲学。

我的座右铭是：“天才可贵，精英可贵，平凡之人，亦有其可贵之处。”我一直想着日本人的特质，也深知“急于求成”并非好事，更清楚自己的能力所在。

岩泽健吉先生也曾对我说：“就做别人没做过的事吧，不用着急，因为没有竞争，你可以慢慢研究，说不定能从中发现有趣的东西。”我深以为然。

3.5 奇点解消问题

奇点解消问题，是扎里斯基教授年轻时研究的课题，他最终因难度太大而放弃了。他只解决了三维空间的奇点解消问题，之后便因问题愈发复杂，止步不前，而这个问题，也成了无人敢碰的难题。我觉得，这正是岩泽先生所说的“别人没做过的事”，便开始研究这个课题。

奇点其实无处不在。就像人的脸，有人眼睛大，有人眼睛小，有人嘴巴小，每个人都有自己的特征，这些特征，就如同“奇点”。还有人说，耳朵大的人会成为有钱人，这些说法姑且不论。大家不妨想象一下，如果人的脸像气球一样光滑，没有眼睛、鼻子的区别，那该多无趣。所以说，有奇点，才更有意义，奇点无处不在。

能师从扎里斯基教授，是我一生的幸运。他为人十分热心，在路上遇到我，会问：“钱够花吗？”我对他说：“我想买台打字机，有了打字机，就能写论文了。”他问：“要多少钱？”我说：“大概 40 美元。”他立刻掏出 40 美元递给我，也没说让我什么时候还。当然，几年后，我还是把钱还给他了。

3.6 扎里斯基的四位弟子



扎里斯基教授有四位弟子，我是其中之一。他们分别是：米夏埃尔·阿廷、大卫·芒福德、史蒂文·克莱曼，还有我广中平祐。

最右边的高个子，是米夏埃尔·阿廷，他的父亲埃米尔·阿廷是德国著名数学家，他跟着父亲来到了美国。听说他在家里，只要敢说一句英语，父亲就会严厉地喊：“说德语！”

阿廷旁边的，是史蒂文·克莱曼，他是土生土长的美国人，身上有着典型的美国人的优点。

克莱曼旁边的，是大卫·芒福德，他年轻时从英国来到美国，才华横溢。

最左边那个个子最矮的，就是我，从日本来的。我虽是个子最矮的，却是四人中年纪最大的，其他三位都比我年轻。但他们的才能，实在令人惊叹。

我不禁觉得，上帝分配才能时，从来都不是平均的。他们个个头脑绝顶聪明，尤其是大卫·芒福德，更是天赋异禀。米夏埃尔·阿廷则有着极强的“数感”，他看似散漫，却能快速抓住问题的关键。小平邦彦先生曾说，有“数感”的人，就像能用鼻子嗅出数学问题的关键一样，这样的人，就算进展慢一点，也能做出优秀的研究。米夏埃尔·阿廷，就是这样有“数感”的人。史蒂文·克莱曼则活力满满，是四人中最年轻的。

大卫·芒福德头脑聪明、直觉敏锐，还十分温和，能同时拥有这三个优点的人，寥寥无几，就算是相扑横纲，也未必能做到（听众大笑），他就像相扑名将大鹏一样，实力超群。他比我小五六岁，却教会了我很多东西。

能遇到这样三位优秀的同门，是我莫大的幸运。我们四人，总是一起学习、一起研究。

3.7 与格罗滕迪克的相遇

或许这就是“环境因子”的作用吧，身处良好的环境，会成为人生莫大的幸福，而我，就是这样一个幸运的人。我身上有个优点，就是不偷懒，而且从不装模作样，只要听到有趣的事，就会立刻凑过去。

在哈佛大学求学时，著名数学家格罗滕迪克来到学校做讲座。那时我还是研究生，还没拿到博士学位，小平邦彦先生就坐在我旁边，左边则是拉乌尔·博特，他当时也是哈佛大学的教授。

格罗滕迪克讲的是概型理论，内容十分抽象。小平先生转头问博特：“你听懂格罗滕迪克在说什么了吗？”博特回答：“听不懂。”小平先生又转头问我：“广中，你应该听懂了吧？”我只好说：“不，我也听不懂。”

但格罗滕迪克的思考方式，十分独特，我觉得十分有趣。讲座结束后，我常去他住的公寓找他聊天。与其说是聊天，不如说是听他讲些生活琐事，他会对我说：“这种葡萄很好吃。”还会买来看起来品相不好的葡萄，说：“品相好的葡萄，又贵又不好吃，这种品相普通的，又便宜又美味。”

后来，他要回法国时，对我说：“要不要来巴黎玩玩？”我回答：“好啊，可是我没钱。”他说：“这点钱，我还是出得起的。”那时他已是教授，有稳定的收入。我说：“那我不客气了。”我本就是个不讲究奢华的人，无论到哪里，都能安心生活，便跟着他去了巴黎。

3.8 在巴黎的日子

到了巴黎，我大为震撼。格罗滕迪克所在的研究所，位于香榭丽舍大街附近的圆顶珠宝五号广场，是在星形广场附近的一座废弃博物馆的一层，他们把这里当作研究室。

研究所的所长，是名叫莫尚的先生，他是从雷诺公司出来的商人，也是数学系毕业的。研究所里有两位教授，一位是还很年轻的格罗滕迪克，另一位是迪厄多内。迪厄多内十分欣赏格罗滕迪克的才华，一心想为他建一所研究所，他说服了在雷诺公司担任高管的莫尚，最终才有了这所研究所。

研究所里有一位所长、两位教授，还有一位研究员，那位研究员，就是我（听众大笑）。但只要不追求奢华，日子其实很好过。生在这个时代的普通国家，只要不贪婪虚荣，就能安稳生活。

没过多久，一个名叫德利涅的年轻人来到了研究所，格罗滕迪克对他赞不绝口，说：“这是自希尔伯特以来，最天才的数学家。”我当时心想：“哦，是吗？”可接触后才发现，德利涅确实名不虚传——每当格罗滕迪克讲解问题时，他总会连连点头赞叹，无论格罗滕迪克说什么，他都能心领神会。

当时和我相恋、后来成为我妻子的人，曾说：“德利涅这个人，看起来就像个和尚一样。”

后来，我成了哈佛大学的教授，在离哈佛大学很近的地方，买了一栋房子，房子对面就是哈佛大学。那时，德利涅也已成了知名学者，一位优秀的教授，还曾在我家住过一段时间。

4 作为研究者的岁月

4.1 任职布兰代斯大学

说个题外话，研究数学的人应该都认识照片里的人，右边的是小平邦彦先生，我在哈佛大学时，常和他并肩研究。中间的是我，左边的是松阪茂先生，他当时是布兰代斯大学的教授。松阪先生从京都大学毕业后，把京都大学助教授的职位让给了井草准一，自己远赴美国，后来成了布兰代斯大学的教授。

我拿到博士学位后，布兰代斯大学立刻向我伸出了橄榄枝，问我：“要不要来布兰代斯大学做研究助理？”我立刻回答：“好啊。”我从来都不在意薪水多少，也从没主动写过求职申请，都是别人来找我，我也不知道他们看中了我什么。不过，这世上有人喜欢特朗普，自然也有人欣赏我，大概就是这样吧。

想来，这都是松阪先生的引荐，我就这样成了布兰代斯大学的研究助理，开始有了薪水，也顺理成章地结了婚，后来还有了孩子。我在布兰代斯大学度过了四年的时光。



4.2 经哥伦比亚大学，任哈佛大学教授

在布兰代斯大学工作时，我什么都没做，哥伦比亚大学却突然来找我，问我：“要不要转到哥伦比亚大学？”我说：“我现在还只是助教授。”他们说：“那我们等你一年，一年后再请你过来。”一年半后，哥伦比亚大学正式邀请我担任教授。

我拿到博士学位后，第一年做的是助理类的工作，第二年，系主任给我打电话，说要给我涨 500 美元的年薪，还费尽口舌说服我留下。我当时心想：“这有什么好说的。”那时，和我同龄的麻省理工学院助教授，年薪已经有 2 万美元了。而哥伦比亚大学开出的年薪，也是 2 万美元，我说：“那我当然愿意去。”可他们说：“你先在布兰代斯大学升到副教授，再来我们这里。”我和布兰代斯大学的老师说了这件事，他们说：“明年就升你为副教授，最后一年让你做副教授。”

就这样，我在布兰代斯大学从助理做到助教授，再到副教授，四年后，如约前往哥伦比亚大学，直接担任教授。所谓的运气好，大概就是这样吧。

我在哥伦比亚大学教了四年书，后来，我的导师奥斯卡·扎里斯基来到纽约，对我说：“广中，要不要来哈佛大学当教授？”我回答：“好啊，我去。”我就是这样，别人诚心邀请，我就去；没人邀请，我就不去。

4.3 想教出懂事的孩子，就先过苦日子

我后来担任山口大学校长，也是因为别人的诚心邀请，再加上那是我的故乡，若是换作别的地方，我是不会去的。私下里，也有人想请我担任某所大学的校长，或是公立大学的校长，可他们只是私下说说，没有正式邀请，我自然也不会去。

现在的孩子，实在太可怜了。大家不妨想想，世上有很多孝顺的孩子，他们出生在贫苦的家庭，却十分孝顺父母；可也有孩子出生在富豪之家，却做出弑父弑母的恶行。人，本就是这样的生物，大家应该明白这个道理。

所以，每当有人问我：“该让孩子考哪所大学？”我都会说：“与其想这些，不如先过苦日子。日

子苦了，孩子自然会拼命学习，因为他们知道，不学习，未来就没有希望。而且，日子苦了，孩子不会吃太多好吃的，不会长胖，能一直保持健康的身材。”

4.4 与小泽征尔的相遇

说来也巧，我在巴黎跟着格罗滕迪克学习时，偶然遇到了小泽征尔。那时我觉得自己的法语还不够好，便去法语联盟学习，没想到小泽征尔也在那里。我们俩相视一笑，说：“咱俩的法语也太差了。”“是啊，我也是。”“还是说日语吧。”“还是日语听着亲切。”

那之后，小泽征尔时不时会约我一起出去玩，我们就这样成了朋友，一直保持着深厚的交情，这也是一种奇妙的缘分。

我担任哈佛大学教授时，小泽征尔已是波士顿交响乐团的首席指挥；我在哥伦比亚大学当教授时，他还是伦纳德·伯恩斯坦的助理指挥。我们就这样，在巴黎相遇，在纽约相见，又在波士顿重逢。

后来，我渐渐和他断了联系，可突然有一天，他给我打电话，说：“我在松本办了一个纪念斋藤秀雄的音乐活动，想请你担任这个活动基金会的理事长。”我问：“你怎么突然做起这个了？”他说：“就是做音乐相关的事，在松本做。”我说：“我对音乐一窍不通，怕是做不好。”他说：“正因为你不懂音乐，才请你做，没关系的。”我说：“既然你这么说，那看在老朋友的面子上，我就做吧。”就这样，我当了9年的基金会理事长。

4.5 推举扎里斯基为名誉教授

我和芒福德都成了哈佛大学的教授，而且都拿到了菲尔兹奖。一位导师的两位弟子都获此殊荣，这是十分罕见的事。所以，我们想推举已经到了退休年龄的扎里斯基教授为名誉教授。那时我正好担任数学系主任，便负责操办了这件事，这张照片，就是当时拍的。想来大家也没想到，我会讲这些琐碎的小事吧。



ザリスキー教授へのハーバード大学名誉博士、1981

其实，扎里斯基教授还曾受邀担任美国数学会的会长，任职时，大家希望他能做一次演讲，讲讲自己的经历。他出生于俄罗斯，为了躲避战乱离开家乡，在意大利又遭受了墨索里尼政权的迫害，之后逃往美国，有着十分坎坷的经历。而且，他见证了意大利代数几何的黄金时代，大家都希望他能讲讲那个年代的故事。

可扎里斯基教授却说：“我只讲自己当下正在研究的数学问题。”即便当了会长，他的演讲内容，还是数学研究，他就是这样一位纯粹的学者。

5 献给妻子的最精彩的论文

5.1 我那特别的才能

效仿扎里斯基教授这样的大师，或许有些不自量力，但我还是想讲讲数学研究的事。

像我这样天赋平平、直觉迟钝的人，会在不经意间练就一种特别的才能。具体来说，就是我听讲座时，当时会觉得很有收获，可转眼就忘了。

上学时赶上学生运动，同学们都去参加游行，只留下我一个人听讲座，他们说：“广中，你留下来听课，记好笔记。”我答应了，认真记了笔记。可等他们回来问我：“讲座讲了什么？”我却说：“忘了。”他们说：“那把笔记给我们看看。”我把笔记递给他们，他们看了之后说：“你听得很认真啊，笔记记得这么详细，太厉害了。”可我是真的全忘了。

这是我从小就有的毛病，听什么都转眼就忘，到了这把年纪，还是没变（听众大笑）。不过，也正因如此，我这个记性不好的人，到了 80 岁，也不会为记忆力衰退而难过，因为现在和年轻时，记性没什么两样。而且，年轻时的记忆，会在不经意间回想起来。有时觉得“好像听过这话”，可怎么也想不起来，可在做别的事时，过了一周、三周，甚至一个月，突然就会恍然大悟：“哦，那个人当时说的是这个意思。”有人说这是“记性像走马灯”，而我，就一直带着这个毛病。

5.2 人老了，本性依旧

这种迟钝的特质，就算到了 85 岁，也不会改变。我常对年轻人说，等你们到了 85 岁，就会遇到三个问题。

5.2.1 记忆力

第一个问题，是记忆力，尤其是短期记忆力，会彻底衰退。我现在常常忘了眼镜放在哪里，只能上上下下跑着找，不过也正因如此，我的腿脚还很利索（听众大笑）。还有朋友对我说：“我也要向你学习，故意忘东西，锻炼腿脚。”

而且，我根本不在意自己记性不好，就算忘了对方是谁，也能坦然问：“你是谁来着？”就算问了，转眼又会忘记。

5.2.2 爆发力

第二个问题，是爆发力的消失。我年轻时写第一篇奇点解消的论文，曾连续写了三周。初稿写好后，我拿给麻省理工学院和哈佛大学的学者看，他们都说：“看不懂，写得不对劲。”我一气之下说：“算了，我自己一个人研究。”之后又花了三个月，全身心投入研究，重新撰写论文。

那时，妻子总会问我：“今天写了几页？”我会说：“写了这么多，谁能帮我打出来就好了。”第二天一早，她又会问：“今天打算写几页？”她真是一位好妻子。那时没有打字员，也没有打字机，论文都是手写的，最后成了一篇长篇大论。论文之所以这么长，其实是因为我写得不好。小平邦彦先

生的朋友斯宾塞曾说：“广中的论文也太长了，简直像电话簿一样。”要是放在现在，这篇论文大概3页就能写完，只是当时我能力不足，才写得这么长。而我能完成这篇论文，靠的就是那份坚持。

现在我写论文，也是如此，早已没了年轻时的爆发力。用电脑写论文，用的是TEX软件，可就算盯着键盘，也总会把6和8、9和8弄混，打出来的字乱七八糟，根本看不懂。只能删掉重写，可重写时，又会因为按错相邻的按键而出错（听众大笑）。没办法，只能一遍遍改，写论文的速度变得很慢。但慢也有慢的乐趣，一笔一划地写论文，写完后会满心欢喜，就是这样简单。

一篇论文写好后，会得到别人的称赞，说这是一篇优秀的论文。可等过了三四年，再回头看，自己也会觉得，这篇论文其实没那么好。但只要这篇论文能给别人带来启发，让别人继续研究，那就足够了。

5.3 没有持久力，也能找到研究的乐趣

对我来说，研究最大的乐趣，就是论文完成的那一刻。而我因为写得慢，这份期待的快乐，也会更长久，这难道不是一件好事吗？所以说，没有爆发力，也并非坏事。

第三个问题，是持久力的下降。我打字的速度本就慢，要是连续打5个小时的字，眼睛就会花，看东西模糊，大概是散光的缘故。不过，重写的时候就能发现错误，改过来就好，只是这样会耗费大量的时间。而且连续工作5个小时，脑子就会变得昏沉，转不动。

幸好我喜欢音乐，这时就会听听音乐，放松一下。听上一个小时的音乐，心情就会变好，就能重新开始写论文了。

5.4 金婚纪念日的誓言

我和妻子结婚50年时，举办了金婚纪念日的庆祝活动，只邀请了亲戚，来了将近200人。我的大姐现在快100岁了，她16岁时，在父亲的安排下结了婚，如今已是子孙满堂，曾孙都有了。我的父母和他们的兄弟姐妹，也都结婚生子，每家都有两三个孩子，不少人也有了孙子。

我自己也有孙子，家里还有人有了曾孙，一家人聚在一起，十分热闹。看着这200多人的大家庭，我心想，要是在战国时代，这都能组建一支军队了，现场还有嗷嗷待哺的婴儿，十分热闹。

金婚纪念日上，大家让我说几句，我思索片刻，说了一句话——那是2010年的事，距今7年了。我说：“我要写一篇论文，一篇比我以往所有论文都更精彩的论文，把它献给我的妻子。”

虽说当时我已经年纪大了，说这话有些不自量力，但话已出口，就必须做到。我以4年前在韩国发表的一篇论文为基础，开始了这项研究。

5.5 抽象代数的妙处

这项研究，还是关于奇点解消的问题。要是能给大家看相关的图就好了，奇点就是图形上那些尖锐的点、相交的点，一眼就能看出来。我的研究，就是如何把这些有奇点的图形，转化为没有奇点的图像。天天看着这些图形，难免会觉得厌烦，不想再研究，我想，我的前辈们，大概也有过这样的感受。

但我很幸运，永田雅宜先生教了我抽象代数，后来跟着格罗滕迪克学习时，又深入研究了现代代数，也就是函子相关的理论。所以，我对“抽象代数”这个词，一点都不觉得陌生。

抽象代数的有趣之处，在于现实中能看到的图形，往往复杂到难以入手，可一旦把它转化为代数问题，用多项式来表示，就可以随意推导、变换了。比如改变多项式的系数、对多项式求导，生成新的多项式，再将不同的多项式结合起来，往往能得出有趣的结果。过程中，我根本不明白几何上的变化是什么样的，但最后总能得出结果。

这就是代数的妙处：就算不知道自己在做什么，也能得出好的结果——当然，要是最后得不出结果，那一切就白费了（听众大笑）。

5.5.1 凡事皆有两种可能

凡事都有两面性。我很喜欢一位喜剧演员，丹尼·凯耶，他在电影里常说：“There are always two possibilities.（凡事皆有两种可能）”“要么成功，要么失败”“要么好，要么坏，凡事都是如此”。他用这句话逗笑观众，而我却觉得，这话十分有道理。

研究数学也是如此，要么用代数方法，要么用几何方法。几何方法能把图形直观地展示出来，带来不少启发。

5.5.2 瑟斯顿的视觉天赋

普林斯顿大学有一位名叫瑟斯顿的教授，拉乌尔·博特在密歇根大学任教时，曾参与过瑟斯顿的入学考试评审，当时大家为了是否录取他，争论了很久。因为不管出什么题，瑟斯顿都只画图，不写公式，大家根本判断不出，他到底是真的懂了，还是不懂。

瑟斯顿有着独特的视觉天赋，而这也是一种难得的才能，他最终也成了普林斯顿大学的教授。这世上，就是有这样的人。

能通过观察图形找到解题思路的人，寥寥无几，而数学中，还有无数比这更复杂的图形。这张图是我借别人的，说不定之后会被人责怪，因为我自己根本画不出来。但几何的直观性，确实能为研究带来不少灵感。

5.5.3 代数的奇妙特性

而代数的奇妙特性，在于就算你不知道自己在做什么，也能在不经意间得出结果，有时甚至会因为一个“错误”，得到意想不到的好结论。代数几何之所以有趣，就是因为它结合了几何和代数的优点：既能像几何一样，直观地感受研究的乐趣，也能像代数一样，在看不见的世界里，探索未知的乐趣。

我之所以格外喜欢奇点解消问题，就是因为它无法被直观地看见。研究时，我常常不知道自己在做什么，只是凭着感觉写，中途也会不断出错，可最后总能找到解决的方法，这就是这项研究的魅力。

5.6 献给妻子的论文

2004年，我开始尝试将这些想法整理成体系，既然向妻子许下了承诺，就一定要完成这篇论文。其实，从1964年开始，我就有了相关的想法，而这次的研究，在某种意义上，也算是取得了成功。

5.6.1 极大接触

简单来说，我的研究思路是：对于一个有奇点的图形，用一个没有奇点的图形去与它相切，就会得出接触指数，也就是两个图形的贴合程度。有奇点的图形和没有奇点的图形，本无法融合，但可以通过弯曲，实现“极大接触”。

要做到这一点，需要考虑所有可能的相切方式，方式多到数不清。就算有人让我去研究、去观察这些方式，我也做不到，因为原本的图形就无法直观看见，再与其他图形相切，就更看不见了。

5.6.2 与有限生成代数等价

但我发现，将这个几何问题代数化后，它其实与有限生成代数是等价的。这样一来，只要研究有限生成分次代数的生成元就够了，而且我还发现，这些生成元有着十分特殊的形式。

这是因为有求导这个运算——虽然没有积分运算，但求导运算十分关键。我发现，对定义图形的方程式求导后，奇点的范围会变得更大。所以，不断地求导，到最后，奇点的范围会大到变成一个平面，这样问题就迎刃而解了。

这个方法在特征 0 的情况下，十分有效，但在特征 p 的情况下，却行不通。因为在多项式中，会出现变量的 p 次幂项，对这样的项求导，结果会为 0，无法继续推导。但如果是有有限生成代数，就只需要研究有限个特殊的函数，这就大大降低了研究的难度。至于这些函数和原本的图形有什么关系，我根本不在意。“有限”这一点，实在是帮了我大忙。我就这样开始撰写这篇论文，幸好有川之上君这位年轻的学者，帮我把论文修改得十分工整，帮了我很大的忙。这就是研究的开端。

5.6.3 微分积

我的另一个研究思路，是“微分积”：对方程式求导，随意选取一个求导结果，再对原方程式进行另一种求导，将两个求导结果相乘，这就是“微分积”。

通过这种方法，能求出单纯求导无法得到的结果。具体来说，之前提到的生成元，大多是某个参数的 p 次幂，再加上高次项的形式。如果整个式子都是 p 次幂，那直接开 p 次方根就可以了，这是最简单的情况。

我为此研究了大约 10 年，才终于找到了解决方法：不妨先忽略非 p 次幂的项，专注于降低重数。有很多学者一直在研究如何降低重数，可这是一件十分困难的事，刚觉得重数降低了，转眼又升高了，反复如此。就算做出了重数不再升高的图形，也没有实际的用处。

而“微分积”的妙处，在于它不只是单纯的求导，而是对同一个方程式进行两次不同的求导，再将结果相乘，这样就能精准捕捉到非 p 次幂的项。

5.6.4 抬升与降指数

在特征 p 的情况下，当求导运算涉及 p 次幂项时，会出现两个次数：一个是方程式本身的齐次数，一个是求导后得到的次数。为此，我想出了一个技巧，名为“抬升 (leverage up)”和“降指数 (exponent down)”：不要想着降低次数，反而要不断抬高次数，次数越高越好，这样就不用再担心 p 次幂项的问题了。

所以，我只需要想着不断抬高次数，保留 p 次幂项，对非 p 次幂项进行求导和相乘，次数就会不断升高。稍微计算一下就能发现，对一个式子求导，再将两个不同的求导结果相乘，得到的式子的齐次数会降低。而这个齐次数，代表着它在分次代数中的位置，次数会不断降低，直到达到最小值。

这里的次数，意味着在进行变换时，需要去掉多少项。那些想着降低重数的学者，大多都失败了，而我反其道而行之，选择抬高次数。只要将式子表示为有限个项的和，次数就会不断升高，这样就不用再担心 p 次幂项的干扰，只需关注 p 次幂项就够了，非 p 次幂项可以暂时忽略。

之后，会出现例外除子，研究的关键，就是消除例外除子的倍数，通过新的变换，去掉多余的例外除子。等把这些都处理好，剩下的就都是 p 次幂项了，这时开 p 次方根，就能得到一次式开头的方程式，也就是没有奇点的方程式，这样就实现了奇点解消。

找到这个方法后，我又将其应用到了环境约化中，把高维的问题转化为低维的问题，这样就可以用数学归纳法来证明了。

目前的难点，是把“抬升与降指数”这个技巧，从局部推广到全局。局部的证明已经完成，并不难，但全局的证明，还需要花费不少心思。从向妻子许下承诺到现在，已经过去了7年。

这7年里，妻子总在问我：“论文什么时候能写完？”有一次我说：“大概还需要一年。”一年后，她又问：“什么时候能写完？”我说：“大概还要一年吧。”就这样反复说着，七年的时光一晃而过。最后我只能说“还有一个月就好”，只因研究的各个环节终于开始环环相扣，确实到了收尾阶段。又过了些时日，我感觉真的要完成了，便改口说“只剩一周”。

一周过后，她又问：“什么时候能写完？”我只好把电脑拿给她看，说：“你看我用TEX写论文，有多费劲。”可她只是说：“我看不懂你在写什么。”

就这样，我一遍遍说着“还有一周”，到最后，她也不再追问了。我问她：“怎么不问了？”她答道：“问了也是白问，你每次都这么说。”也在这个时候，这篇论文终于完成了。我兑现了对妻子的承诺，只是论文里的TEX拼写错误，或许还要花上好几个月才能逐一修正。

6 数学是抽象的学问

6.1 何为有用？

但研究成果是否会被运用，于我而言并无所谓。数学无疑是一门抽象的学问，所以难免有人会说它毫无用处。可那些说数学没用的人，不妨好好想想，何为“有用”。一件事是否有用，本就是极难回答的问题。当下看似无用的东西，或许一百年后，就会发挥巨大的作用。爱因斯坦获得诺贝尔奖，并非因为相对论，可时至今日，天文学的研究早已离不开爱因斯坦的相对论。当然，也有许多研究，无论过多久，都始终派不上用场。但我研究数学，并非抱着“总有一天会有用”的想法。所以当有人说一件事“有用”或“无用”时，还请务必谨慎，不妨问问自己：“这里的有用，是指什么时候？一年后？一个月后？还是能看到一百年后的价值？”

6.2 数学的乐趣，无关年龄

再者，研究数学的过程本身，就充满了乐趣。我想，再没有比数学更有趣的学问了。而且数学研究无关年龄，无论到了多大年纪，都能做，只是需要改变研究的方式和心态。追求最前沿、最尖端的研究，对年轻人来说自然是好事。可如果到了80岁，还想继续写论文，就不可能再像年轻时那样，写得又快又多。如果只是真切感受完成论文时的喜悦，那便不必急于追求“最前沿”“立刻有用”，与其为此焦虑奔波，不如选择另一条路，慢慢来就好。

7 人生收尾

我曾读过一则小故事，柴可夫斯基创作《第五交响曲》的最后一个乐章时，融入了诸多复杂的技巧，乐曲中既有极致的美，也有不尽完美之处，问世之初也并未收获太多好评。但柴可夫斯基完成这部作品时，却因满心的喜悦，流下了眼泪。难道大家不想拥有这样的经历吗？在离开这个世界之前，为自己的工作拼尽全力，最后因满心的欢喜落泪。如果有人觉得这毫无意义，那也无妨，这不过是一种生活方式，各有所好罢了。我没有资格对他人的选择指手画脚，只是我自己，更向往这样的人生。我想，当我最终躺进棺木时，或许也会含泪微笑吧。而且数学本就是抽象的学问，无论身在何处，都能研究。其实还有许多细节想和大家聊聊，只是时间到了，就说到这里吧。如果有人想看看我正在写的这篇论文的草稿，不妨给我写封信。我想让大家知道，即便到了85岁，也依然能做这些事。只是奉劝大家，不要轻易向妻子许下这样的承诺——年轻时或许无妨，年纪大了，可就太难实现了。

那么，我的分享就到此结束了。

A 美国数学会《通讯》访谈编辑稿

以下是 2004 年 12 月，美国数学会《通讯》资深撰稿人兼副主编艾琳·杰克逊对广中平祐的访谈编辑稿。——艾琳·杰克逊

A.1 家庭与童年

《通讯》：您 1931 年出生于山口县。我很想了解您在那里的成长经历和家庭情况。

广中平祐：我出生的小镇非常小，我的一个兄弟至今仍住在那里。山口县离广岛不远，小镇位于山口县东侧，面向濑户内海，人口约 3000 人。镇上一半人以捕鱼为生，另一半则务农。但我的父亲是商人，做服装生意。

《通讯》：您家里有多少孩子？

广中平祐：我有很多兄弟姐妹，一共 15 个。不过 15 这个数字其实是 4+1+10 的结果：我父亲的第一任妻子去世了，第二任妻子生下 4 个孩子后也离世了；我母亲在嫁给我父亲之前有过一段婚姻，丈夫去世后留下了 1 个孩子。所以我父亲和母亲结婚时，已经有 5 个孩子了，之后他们又生了 10 个，我是这 10 个孩子中的长子，还有一个姐姐。二战期间，日本政府鼓励多生孩子，尤其是男孩。但战后，抚养这么多孩子变得十分困难。我的一个哥哥（也是父亲的儿子）在新几内亚与美军作战时牺牲，年仅 23 岁；另一个哥哥参与了侵华战争，受伤后在北京的一家医院去世。

顺带一提，我父亲在娶我母亲之前，曾与我母亲的姐姐结婚，她就是那 4 个孩子的母亲。

《通讯》：原来如此——您的父亲娶了姐妹俩。

广中平祐：是的。我想我母亲当时是想帮助生病的姐姐。我很庆幸自己出生在一个大家庭：小时候，身边有同龄或年长的人可以依靠、可以学习，而面对年幼的弟妹，你会自然而然地产生照顾他们的责任感。我父亲不算贫穷，但战争让很多事情变得艰难。战前他有一家纺织厂，送长子去名古屋的一所工程学校学习纺织技术，送次子学习商业，对这两个孩子寄予了厚望。但在失去他们之后，父亲彻底心灰意冷，卖掉了工厂，不再工作。战后自然发生了巨大的变化：经济萧条，货币改革导致旧货币作废，还有大规模的文化改革。父亲原本有一些农民为他工作，改革后他不得不把所有土地都分给了他们。无论在哪个地方，战争结束后，一切都会陷入混乱！

《通讯》：您所在的地区是否受到了原子弹爆炸的影响？

广中平祐：事实上，我父亲看到了爆炸的景象，但距离较远，所以没有受到影响。我的表弟当时在广岛上学，受到了辐射灼伤，但后来康复存活了下来。不知为何，我们所在地区的人算是幸运的。但当时人们都担心会遭到轰炸，每当听到飞机声，大家就会四处疏散。那时候，官方并没有说那是原子弹，只称之为“特殊炸弹”。当时美国空军完全掌握了制空权——虽然还没控制地面，但天空已被彻底掌控。我们看到飞机飞来，就会有谣言传开：“可能是‘特殊炸弹’来了。”

在那种情况下，大人们对未来感到绝望，但孩子们却一无所知！其实我们当时还挺开心的。美国人在海底布了很多水雷，战后日本人把水雷打捞上来引爆，那场面就像巨大而美丽的烟花，我们看得津津有味！

《通讯》：您从小就对数学感兴趣吗？

广中平祐：孩子们小时候总会有各种各样的梦想。小学时，我想成为一名浪花节说唱艺人——这种艺人会讲述黑帮、武士的故事或悲伤的故事，部分内容是唱出来的。我很喜欢这种表演，就想从事这一行！但到了中学，我开始喜欢上数学。其实从一年级开始，我在数学上就很有自信。

《通讯》：您年轻时有没有遇到过能激励您的数学老师？

广中平祐：说起来有点傻，但如果有老师表扬你，比如考试考得好，你就会为此感到非常自豪。我就有过这样的经历。

《通讯》：您也学过音乐吗？

广中平祐：初中时我想成为一名钢琴家，但当时只有学校有钢琴。我们的学校在柳井市，坐火车大约需要 30 分钟。我会赶早班火车去学校，在上课前练钢琴，完全照着乐谱弹奏。音乐老师偶尔会教我一些技巧，但我并没有认真系统地学习。有一次，他们让我参加校际联合音乐会，演奏肖邦的《即兴曲》——那首曲子难度相当高，结果我演得一塌糊涂！女生们弹得比我好得多。但在男校里，只有我会弹钢琴，所以他们还是让我去了。女校的老师对我的表演评价极差，这对我打击很大。后来我就此问过一位老师，老师说我不适合当音乐家，因为音乐家（尤其是钢琴家）通常三岁就开始学琴，而且有专门的老师指导。而我初中才开始学，还没有真正的老师，所以老师建议我放弃。我说：“好，那我就放弃。”

不过我仍然喜欢钢琴音乐和古典音乐，对音乐家也很感兴趣。1959 年至 1960 年我在巴黎时，遇到了小泽征尔，我们成了非常要好的朋友。小泽征尔现在担任维也纳国家歌剧院的指挥，每年夏天都会回日本待大约两个月，参与松本的斋藤纪念音乐节（斋藤是小泽征尔的老师）。在音乐节期间，小泽征尔会指挥管弦乐队，还会指导年轻人。有一个基金会支持这个音乐节，小泽征尔邀请我担任基金会的理事长。

我在巴黎和他相识了大约六个月，成了好朋友，但后来为了回哈佛大学拿博士学位，渐渐把他忘了。拿到博士学位后，我开始在马萨诸塞州的那片区域工作，他突然给我写信说要第一次来美国。我去机场接了他，他参加了坦格尔伍德的一场指挥比赛，夏尔·明希担任评委会主席，小泽征尔获得了指挥一等奖。我去坦格尔伍德听了他的指挥，之后他返回了巴黎。1964 年，我成为哥伦比亚大学教授，而他当时也在纽约，师从伦纳德·伯恩斯坦，所以我在那里又见到了他，还去听了他的音乐会。1968 年我回到哈佛大学担任教授后，又一次暂时把他忘了，直到他成为波士顿交响乐团的指挥，我们的联系才一直持续下来。或许他喜欢和我相处，就是因为我对音乐一窍不通吧！

《通讯》：回到数学相关的话题，您什么时候开始认真考虑将数学作为事业的？

广中平祐：我想，真正开始考虑成为一名数学家，是在高中的时候。当时广岛大学的一位数学教授来我们学校做讲座，内容有点专业，我没能完全听懂，但他在讲座开头说的一句话让我印象深刻：“数学是一面镜子，你可以在其中投射世界上的一切。”我当时既困惑又深受触动，于是申请了广岛大学，想师从这位教授。但我根本没为入学考试做任何准备，结果落榜了！

第二年我开始认真备考，申请了京都大学并成功入学。当时我想成为一名物理学家，理由很单纯，没什么深奥的哲学考量——只是因为汤川秀树是日本第一位诺贝尔奖获得者，而他当时就在京都大学。幸运的是，我的姐姐嫁给了京都的一个人，我可以住在那里。大一的时候，我相当认真地学习了物理，还有化学和一些生物学课程。但到了大二，我逐渐意识到自己更适合数学而非自然科学：学习过程中，遇到数学问题时，我总会感到莫名的兴奋。大概到了大三，我已经明确数学会成为我未来的职业，从那以后，我就全身心投入到数学中了。

《通讯》：当时京都大学的数学教授们怎么样？

广中平祐：我们那时候还年轻，懂的不多，但能明显感觉到，与美国和欧洲相比，日本在数学和科学领域还很落后。所以如果有可能，我们都想去欧洲或美国深造。但当时日本有一个优势，这对我来说是幸运的，在某种程度上也决定了我的数学研究风格——那就是抽象代数。日本数学界一直努力紧跟数学发展趋势，而当时抽象代数至少看起来是数学的前沿领域。那些工程师或物理学家使用的数学，被认为是“接地气的数学”。我的老师和他们的同事们对抽象代数更感兴趣，数论也不例外，但主要是抽象数论。所以当我有机会去美国时，至少在抽象代数方面我是有自信的，这帮助我避免了自卑感！

A.2 哈佛求学与扎里斯基门下

《通讯》：您最终是如何前往哈佛大学并师从扎里斯基的？

广中平祐：我 1949 年进入京都大学本科，读了四年后进入研究生院。当时秋月康夫是那里的教授，他本人在代数几何方面的研究不算多，但对该领域非常感兴趣，致力于在日本（尤其是京都）建立代数几何研究体系。他是最早邀请代数几何领域优秀青年学者的人之一。当时日本的大学通常会聘用本校毕业生，但秋月康夫没有这样做，而是从名古屋、大阪市立大学、东京大学等学校挑选了四五位顶尖人才，组建了一个研究小组。此外，他的讲座非常前沿，因此很受欢迎——其他教授的讲座大多枯燥乏味，讲的都是复分析等经典内容，都是书本上已有的知识，而秋月康夫则截然不同，他努力介绍新的知识，还邀请了很多学者来访。我加入了那个研讨小组，是其中最年轻的成员。

后来秋月康夫邀请扎里斯基访问京都。当时扎里斯基是将代数几何高度代数化的顶尖学者——他从事的是“代数化的代数几何”研究。他的理念是，当几何建立在代数基础上时，就可以避免被几何直觉误导。他说，当他基于代数撰写代数几何相关内容时，严谨性是自然而然的，无可置疑。代数有时可能会变成“抽象的无稽之谈”——玩弄符号却不知其意义，但扎里斯基和秋月康夫都认为，应该用代数来研究几何。扎里斯基来访时，我试图向他介绍我的研究，但我的英语一直不好！好在我的同事和老师帮我向他解释了我的研究内容。后来扎里斯基说：“或许你可以来哈佛大学学习。”我说：“好的。”

《通讯》：您什么时候去的哈佛大学？

广中平祐：1957 年，也就是扎里斯基回去后的那个夏天。我常对年轻人说，无论你是出国深造还是在日本学习，都要选择该领域最顶尖的学者，但不要指望能直接从他那里学到很多东西！奇妙的是，在这样的学者身边，会聚集很多有才华的年轻人，你能从他们身上学到更多。我就是这样：我从扎里斯基的论文中学到了很多，他偶尔也会给出一些建议，但他实在太忙了。其他学生包括迈克尔·阿廷、史蒂文·克莱曼和大卫·芒福德，我们四个人有时会自己组织研讨会。作为学生，我们有很多时间讨论数学，没有正式的职责束缚——做学生真好！

A.3 奇点解消问题

《通讯》：您什么时候开始对奇点解消问题产生兴趣的？

广中平祐：我想是在京都大学大三的时候。我们把秋月康夫的学术团体称为“秋月学派”，当时大约有十个人，经常聚在一起讨论、举办研讨会。我几乎总是听众，因为我是小组里最年轻的。有一次，小组里有人谈到了奇点解消问题，这是我第一次听到奥斯卡·扎里斯基的名字。我觉得这个问题非常有趣，就决定研究它。当时我没有任何相关技巧，什么都不懂，但就是觉得这个问题很有吸引力。所以尽管没有直接着手研究，这个问题一直留在我的脑海里。我当时还在阅读代数几何的入门书籍和让·皮埃尔·塞尔、安德烈·韦伊、扎里斯基等人的相关论文，但我认为正是那一次，我真正对这个问题产生了兴趣，这也促使我决定投身代数几何领域。

《通讯》：为什么这个问题对您来说如此重要？

广中平祐：我不知道，这就像一个男孩爱上一个女孩，很难说清原因。事后你可以找出各种各样的理由，比如我学了不少抽象代数，所以任何能用代数表达的东西都让我感兴趣。但代数本身太抽象了，无法触动人心。而奇点解消是一个几何问题，却又不仅仅是几何本身——我很清楚，这类问题无法仅凭几何直觉解决。奥斯卡·扎里斯基已经解决了一维、二维的奇点解消问题，甚至部分解决了三维的问题，所以这是一个更高维度的问题。在高维度空间中，你无法看到所有东西，因此必须借助某种工具来推测、构建相关理论，而这种工具无疑就是代数。这是这个问题吸引我的原因之一。此外，我喜欢基础性的问题：非常聪明的人往往会追逐新的技巧，某个领域发展迅速，他们就想走在前沿；如果你足够聪明，就能成为领跑者。但我没那么聪明，所以最好从一个尚无成熟技

巧的问题入手，然后一步步构建解决方案。不过实际上，这个问题并没有我想象的那么难，结果比我预期的要容易。

《通讯》：是吗？我看到有说法称，您的奇点解消证明是数学史上最难的证明之一。

广中平祐：没那么难，因为我从很多人那里学到了不少东西。比如，京都大学离大阪大学很近，当时大阪大学校长是一位名叫庄司的数学家，他在日本被誉为“现代代数之父”，还与皇室有亲戚关系——他的侄女是现在的天皇妃。此外，名古屋的中山正也是抽象代数领域的学者，他最优秀的学生之一永田雅宜应秋月康夫的邀请来到了京都。所以我很幸运能在京都，有机会接触到这些人。后来我又遇到了扎里斯基，他是一位真正的几何学家。他在意大利时发现，意大利几何学家的直觉非常敏锐，但他们常常提出一些证明有误但结论正确的命题。扎里斯基希望为这些结果建立坚实的基础，于是选择了代数作为基础。我认为这正是代数几何当时的总体发展趋势，安德烈·韦伊在数论研究中，也希望将代数作为代数几何的基础。在哈佛大学时，我学到了那些与几何紧密相关的代数技巧，而不仅仅是抽象代数。我对抽象的东西已经非常习惯，并不惧怕将事物抽象化。此外，扎里斯基的学生如芒福德和阿廷，在几何方面有着出色的直觉，我记得当时觉得他们比我更懂几何，他们真是天才。但幸运的是，我并没有因此感到太自卑，因为我在代数方面很擅长！而且我很幸运去了巴黎——1958年至1959年我在哈佛大学求学时，格罗滕迪克来到了那里，我与他成了朋友，他邀请我去法国。

让我稍微解释一下几何：几何有全局问题和局部问题。局部问题通常通过非常具体的计算来解决，比如给定一个方程，你可以写出方程、展开泰勒级数、观察各项并进行运算。但当你回到全局问题时，局部解往往无法相互适配，这也是扎里斯基遇到的问题之一。他拥有极其精湛的局部技巧：对于某个几何对象，你可以修改它、局部化它，局部化后可以运用很多技巧，但之后却无法将这些局部解连接起来形成全局解。在奇点解消问题上，扎里斯基甚至在三维空间中都遇到了很大困难，最终不得不放弃。一般来说，单个方程的情况很容易处理，但如果有多方程，就会变得困难，或者说人们普遍认为会很困难。但我发现，可以用归纳法来处理多个方程的情况：我从一维多个方程的情况入手，然后注意到下一维度多个方程的情况其实是类似的。这是一个非常简单的发现，但它为我的局部理论奠定了基础。不过全局问题依然存在——你无法拥有全局坐标，只能在局部有坐标和方程。我当时被这个问题困住了，而格罗滕迪克——他真是了不得的人！他从不关注方程，而是从一开始就从全局视角看待一切。所以他的技巧对我来说非常有用。

1960年我从巴黎回来时，写了一篇论文，虽然还没有解决奇点解消问题，但与之相关，当时我已经快要找到解决方案了。你知道，拿到博士学位、找到工作后，整个人会放松很多，尤其是作为外国人，没有工作是一件很可怕的事。所以我在布兰代斯大学找到工作后，就想：“好了，现在该做什么？”然后我突然意识到：“天啊，只要把京都、剑桥和巴黎的所学结合起来，整个问题就能解决了！”我真的很幸运。

《通讯》：有人告诉我，您当时陷入了一种类似恍惚的状态，之后得出了一个极其复杂的证明。他将这与安德鲁·怀尔斯证明费马大定理的过程相比较——怀尔斯在阁楼里闭门研究了七年。您的经历也是这样吗？

广中平祐：嗯，任何一个需要整合多个方面、多个层面的问题，都需要你真正沉浸其中，全身心地思考整个问题。我记得第一次给扎里斯基打电话说我解决了这个问题时，他说：“你一定有很坚固的牙齿。”

《通讯》：这是什么意思？

广中平祐：我想他的意思是，我需要有“啃硬骨头”的毅力——这个问题非常棘手，必须全力以赴去攻克。但他非常善良，一直鼓励我，不知为何对我很有信心。所以我开始反复撰写、修改，一遍又一遍，最终完成了证明。

不过我不确定能否将我的经历与安德鲁·怀尔斯证明费马大定理的过程相提并论：他的理论要

难得多，我的则相对容易。奇点解消是“手工完成”的，没有使用复杂的大型理论或技巧，只是一步步推导。而安德鲁·怀尔斯的证明整合了很多已有的成果，我则主要是通过定义新的概念，逐个案例分析来推进的。

《通讯》：所以您主要是在研究过程中构建自己的理论，而不是依赖已有的理论？

广中平祐：是的，这其实是我的风格。

《通讯》：您一定需要向非数学家解释奇点解消问题，您是怎么解释的？

广中平祐：奇点无处不在。没有奇点，就谈不上形状：写签名时，如果没有交叉、没有尖角，只是一条曲线，那就不能称之为签名。许多现象之所以有趣，有时甚至具有灾难性，正是因为它们存在奇点。奇点可能是一个交叉点，也可能是某个事物突然改变方向的地方。世界上有很多这样的例子，这也是世界之所以有趣的原因——否则一切都会变得平淡无奇。如果所有事物都是光滑的，那就不会有小说或电影了。正是因为有了奇点，世界才变得有趣。有时有人说，奇点解消是一件无用的事——它会让世界变得无趣！但从技术层面来说，它非常有用：因为当存在奇点时，变化的计算会变得极其复杂。如果我能构建一个没有奇点但可以用来计算奇点本身的模型，那将非常有价值。这就像一个放大镜：对于光滑的事物，你可以从远处观察就能识别其形状，但当存在奇点时，你必须靠得越来越远。有了放大镜，你就能看得更清楚，而奇点解消就像是一个比放大镜更强大的工具。

一个非常简单的例子是过山车：过山车本身没有奇点——如果有的话，就会出问题！但如果你观察过山车在地面上的影子，可能会看到尖角和交叉点。如果你能将奇点解释为某个光滑对象的投影，那么计算就会变得容易：当你在评估、微分等过程中遇到与奇点相关的问题时，你可以将其“拉回”到光滑对象上，在那里进行计算会简单得多，之后再将结果“拉回”到原始对象上，就能理解其在原始几何中的意义。

《通讯》：这是一个很美妙的想法。

广中平祐：是的，我认为这是一个好想法。

《通讯》：但要给出一般情况下的证明一定很难吧？

广中平祐：嗯，我并不害怕处理多个联立方程，这是我最引以为傲的个人贡献。常识认为，单个方程比多个联立方程更容易处理，这在变量数量固定的许多问题中确实如此。但当你想要通过对变量数量进行归纳来证明一个适用于所有维度的问题时，从一开始就用多个联立方程来表述问题会更容易。这听起来可能有些矛盾，但事实并非如此。试想一下，你想要利用 n 个变量及以下的结果来证明 $n+1$ 个变量的问题：一个 $n+1$ 个变量的“单个”多项式，可以写成最后一个变量的幂的线性组合，而系数则是 n 个变量的“多个”多项式。因此，你需要 n 个变量的多个联立方程的相关结果。如果一开始就将问题用多个联立方程来表述，那么对于任何数量的变量，归纳证明都能顺利进行。这是一个非常简单的发现，但当我意识到这一点时，我觉得整个证明已经近在眼前了。这是局部层面唯一的问题，而全局技巧则完全来自格罗滕迪克。



1970年9月1日菲尔兹奖颁奖典礼现场，从左至右依次为贝克、广中平祐和汤普森

《通讯》：您能解释一下您在奇点解消方面的工作与更近期的研究（比如森重文在极小模型问题上的工作）有什么联系吗？

广中平祐：顺便说一句，森重文是个天才，而我不是，这是一个很大的区别！我在京都大学担任客座教授时，森重文还是个学生。我在京都讲课，他做的笔记后来被整理成书出版。他真的非常了不起：我的讲座讲得很糟糕，但看他的笔记，所有重点都清晰地呈现出来了！森重文是一个发现者，他能找到人们从未想象过的新事物。

在三维以上的维度中，如果你想对流行或几何进行分类，构建一个光滑的模型会很有帮助，因为光滑模型有很多可用的技巧——光滑意味着局部问题消失了，只剩下全局问题。

奇点的形成过程可以这样理解：你取一个流行，抓住它的某个部分，将其压缩成一个点，这就形成了一个奇点。所以奇点本身也有其几何结构。史蒂芬·霍金曾说，黑洞内部存在另一个宇宙。奇点也是如此：如果你真正深入观察它，会发现一个广阔的世界。因此，处理奇点的问题在于，它看似只是一个点，但内部包含了很多东西。要看到其中的内容，你必须将它“炸开”、放大，使其变得光滑，然后才能看到全貌——这就是奇点解消。而森重文所做的，是通过收缩某个部分来创造奇点。

《通讯》：所以他是从光滑模型开始，然后创造奇点？

广中平祐：是的，一种性质非常好的奇点。这是他在三十出头时的研究成果，完全是开创性的。要对几何进行分类，为每个类别找到一个极小模型会很有帮助，该类别中的其他对象都可以由这个极小模型构建而来。在二维空间中，扎里斯基提出了极小模型理论——当然，意大利几何学家之前也有过相关理论，但扎里斯基使其变得严谨。在二维空间中，极小模型是光滑的，没有奇点，这是最好的极小模型。但在三维空间中，如果坚持要求光滑性，可能就无法得到极小模型。

森重文说：“好吧，如果我们允许存在一些小的、性质良好的奇点，那么就可以得到极小模型。”这完全出乎意料，我们从未想到会有这样的“小型”极小模型。我知道三维及以上空间中不存在光滑的极小模型，所以当他做这项研究时，我认为他走错了方向：“根本不存在这样的模型，他为什么还要找？”但他说：“不，如果我们接受那些我们完全理解的特定奇点，那么就存在极小模型，其他所有对象都可以由它构建而来。”

A.4 从美国回到日本

《通讯》：您在哈佛大学期间，开始一部分时间在美国、一部分时间在京都生活？

广中平祐：是的。离开祖国二十多年后回来，至少在最初几年，我遇到了一些困难。比如，有一次我担任哈佛大学数学系主任，讨论新教职任命时，每个人都有不同的意见：有人强烈推荐某人，另一个人推荐其他人，我们会就此展开讨论。但在日本，情况就不同了——如果你提出一个推荐，其他人通常不会发表任何意见。

《通讯》：没有人反驳吗？

广中平祐：没有。在日本，情况是这样的：假设 A 教授推荐一位年轻人 B 博士，他会以书面形式提交推荐意见。但既然已经提交了，他为什么还要坚持呢？他会想：“让其他人来讨论吧。”然后 A 教授会称赞 C 教授的推荐人选。如果你当真了，就会误解他的意思，会议结束后 A 教授会生气。所以你必须仔细倾听，意识到他实际上是希望自己的推荐能得到支持。

日本人会坚持自己的推荐或自己想要的东西，但不会直接表达——因为如果直接表达了，结果却不如愿，他会觉得丢脸或蒙羞。所以你必须小心，不要让他蒙羞，要间接地猜测他真正的想法。

《通讯》：所以您刚回到日本时，不得不重新学习如何应对这种情况？

广中平祐：我一开始实在无法忍受，因为我已经习惯了美国的方式！在最初的两年左右，我无意中树了一些敌人，这完全出乎意料。但现在我已经习惯了。需要说明的是，我说的是几十年前的情况，是我这一代及更年长的人的做法。日本的年轻一代现在更加美国化、全球化，甚至比我还要明显，尽管我在国外生活的时间比他们大多数人都要长。

《通讯》：做数学有日本风格吗？

广中平祐：这很难说。数学当然是一门科学，但它也取决于个人性格。不过在会议上，你肯定能看到人们行为方式的差异：如果只有日本数学家参加，他们通常不会宣传自己的想法，而是会称赞别人的想法——而且很多时候并不是真心的！你必须习惯这种情况。

日本人的一种文化特质会影响做数学的方式，而不是数学成果本身，在某种意义上，这与俄罗斯人的方式有些相似。例如，冈洁毕业于京都大学，之后大约十年没有发表任何论文，所以无法在好的大学找到工作，最终只能在奈良女子大学任职。他有点古怪，但极具独创性。我在佐藤干夫身上也看到了同样的风格和极高的创造力，小平邦彦在某种程度上也是如此——尽管小平邦彦去了美国，变得更加西方化，但他的本质依然如此。这与日本文化有关。简单来说，西方世界的人通常会努力表达自己、展示自己，试图显得比实际更优秀，通过这种方式获得更多动力，从而达到更高的产出和独创性水平，这是一种方式。但日本的方式，至少传统方式并非如此：不张扬，等待别人认可，即便得到认可，保持谦逊也被认为是一种良好、可敬的品质。所以十年不发表论文并不算什么，数学家必须相信自己所做的事情，而无需张扬。

A.5 数学教育与基金会

《通讯》：您成立了一个名为“日本数学科学协会”的基金会，部分目的是支持面向年轻人的暑期研讨会，这些研讨会已经举办了二十多年。这些研讨会是如何运作的？

广中平祐：有两个研讨会：一个是面向日美大学生的日美联合研讨会，另一个是仅面向日本高中生的研讨会。基于我作为数学家的经验，我认为有趣的是交流和想法，而不是那种组织严密、坐着听讲、记笔记的讲座。当年轻人想要过有创造力的生活时，他们应该学会享受讨论想法的过程，即使这些想法还不成熟、不断变化——事实上，创造性活动中最有趣、最令人愉悦的部分之一就是想法的不断变化，这些研讨会就是这样运作的。

我成立基金会是为了支持这些研讨会。运营了二十年后，我说：“我老了，要退休了。”然后研讨会的校友们接手了组织工作，让研讨会继续办了下去。如今我在两个地方以非常轻松的方式教

轻人：每周在一所音乐、绘画和艺术学校讲一次课；还在一个一年级的班级教课，每月只去两天，但非常有趣。

有一次我说“孩子就像黑猩猩”，有人为此生气了！但黑猩猩真的很了不起。京都大学有一个研究黑猩猩的实验室，我去那里观察过它们：它们的直觉非常敏锐，能瞬间判断一切。例如，经过训练的黑猩猩会按按钮来识别走进来的人，如果答对了，就会得到香蕉之类的奖励——即使只看到半张脸，它也会立刻按按钮，从不犹豫。但如果你试图测试它为什么做出这样或那样的决定，黑猩猩会变得非常烦躁！孩子也是如此。比如我现在教一年级学生欧拉公式——多边形的面、边、顶点数量之间的关系，他们的直觉非常惊人，能猜到答案。

一个人工作时，必须有知识，否则会犯严重的错误，但同时，仅有知识无法创造新事物。你必须有直觉，并且有意识地利用直觉。如何在传授知识的同时，不让孩子失去直觉能力，这是一个有趣的问题。如果你只是不断地向他们灌输知识，大多数孩子会失去直觉，转而依赖知识。知识与直觉之间的这种平衡很有意思。

我现在也还在做一些数学研究，这让我感到非常愉悦。年轻时，你想要取得成就，想要得到同行的认可，但我现在已经没有这种动力了，动力更多来自内心——我想享受创造性思考的过程。到了一定年纪，你会开始学会与时间的流逝友好相处。年轻时，你有时会不知道如何利用时间；而现在，我做数学的态度和二三十岁时一样认真，但方式更加愉悦。我不再担心如果两个月内不发表成果，别人可能就会抢先发表，也不再研究这类问题——我不必再这样做了。我想做的是那些没人会想到的事情！并且可以纯粹享受做研究的过程。

A.6 为什么做数学？

《通讯》：一个天真的问题：您为什么做数学？

广中平祐：年轻时，我对自己为什么做数学有一些想法，但后来想法变了，再后来就不再思考这个问题了——数学只是我的职业。但后来，大约五十岁的时候，我回到日本，在京都的一所小学做讲座。老师们安排了一个与孩子们的问答环节，我说他们可以问我任何问题。有一个孩子问：“你为什么做数学？”我不记得当时说了什么，只是随口编了一些答案，比如“数学很有趣”“很有挑战性”之类的。但离开学校后，我开始认真思考：我到底为什么做数学？我原以为自己知道答案，但当有人真正问起时，我才发现需要重新审视这个问题。

我会收集所有与数字相关的东西，比如我有超过一万张花和叶子的照片，喜欢数一数它们的数量，进行比较。我很庆幸自己是一名数学家，因为我能从数字、加法和乘法的角度发现自然界的数学趣味。

《通讯》：做数学的欲望来自对事物的好奇心吗？

广中平祐：是的。首先，数字本身就很有趣。我认为数论实际上是数学中最重要的分支，也非常困难。如果你认真思考加法和乘法之间的关系，会发现它惊人地奇妙。例如，5 是一个质数，但加上 1 后，立刻变成 6，而 6 是 2 乘以 3——两个完全不同的数。为此大惊小怪似乎很愚蠢，但如果你真正思考为什么乘法会以这种奇妙的方式出现，就会发现它与数论中的许多问题（尤其是黎曼猜想、质数分布）密切相关，而这是非常困难的。这个问题已经存在很多年了，至今仍没有人取得实质性的进展。

《通讯》：您尝试过研究这个问题吗？

广中平祐：没有，我还不够优秀，无法胜任这项研究！尽管如此，它还是给了我一种享受生活的方式。我认为，仅仅从数字、加法和乘法的角度观察自然，我就能比非数学家享受更多乐趣。

《通讯》：这是一种审美感。

广中平祐：是的，所以这本质上是人类朴素的兴趣，是让生活变得有趣、愉悦的一种方式。

《通讯》：您认为数学是一种独立存在、等待数学家去发现的东西，还是人类发明的东西？

广中平祐：我不是历史学家，但大致来说，二战后直到六七十年代，数学确实是一门独立发展的学科，有着强烈的内在发展动力和兴趣。例如，格罗滕迪克就是秉持这一原则的人。在五六十年代，我们数学家看不起那些谈论数学在现实世界中应用的人——如果一个数学家开始谈论应用，我们会说：“哦，他不再是数学家了，变成工程师了”，即使他做的是重要的工作。二十世纪上半叶是数学史上一个独特的时期，一个非凡的阶段，这门学科蓬勃发展——至少我们认为是这样——纯粹且独立于现实世界。这带来了巨大的进步，数学也发生了很大的变化。即便如此，我记得当时有人说数学家在做“抽象的无稽之谈”或“纯粹的废话”，但数学家们并不这么认为，他们在做纯粹的数学。如果当时有人问：“你的工作如何帮助了世界，或者产生了什么有用的东西？”我敢肯定，当时的纯粹数学家会说：“这是一个非常愚蠢的问题！一个非常低级的问题！”

从纯粹数学的角度来看，庞加莱是一位伟大的数学家，但同时他也强调，数学是在试图理解物理现象的过程中发展起来的。基础物理学的快速发展极大地改变了人们的世界观，也给数学带来了巨大的推动——比如爱因斯坦的工作或量子力学，数学在其中发挥了非常重要的作用。但物理学也发生了变化，如今的物理学已经从纯粹物理学转向了更多的应用领域。例如，看看二十世纪后半叶的诺贝尔物理学奖获得者，很多人的研究都更偏向应用——他们研究电学、电子学、化学应用、超导等，更多地与现实世界相关。我记得在二十世纪早期，至少在我的朋友和老师中，有很多物理学家对理论物理和基础物理感兴趣，但这种情况后来发生了很大变化，我认为这也对数学产生了影响。

《通讯》：但菲尔兹奖获得者们仍然和以前一样专注于纯粹数学。

广中平祐：确实如此！但我认为六七十年代是数学拥有无可置疑存在意义的巅峰时期。

《通讯》：您认为数学有一个核心吗？是否存在一些非常基础的思想构成了数学的核心，而其他领域的内容则不那么基础？

广中平祐：嗯，我认为任何与数字深度相关的理论，都是数学家们追求的理想，是数学活动中理想化的部分。

《通讯》：数论是数学的女王。

广中平祐：“女王”这个词可能不太合适！有时候我们遇到的女王并不那么完美！但无论如何，它被视为数学的终极目标之一。几何则非常“好玩”——你可以改变形状、扩展、变形、添加“手柄”等等，你可以尽情摆弄它，无论它是否有意义、是否重要，本身都很有趣。还有人研究动力系统和分析学。我有一个奇怪的想法：分析学家就像武士，他们“一刀下去”——唰！如果这一刀切得好，就能扔掉一部分东西，然后找到一个非常好的公式！

《通讯》：他们切掉了不必要的部分。

广中平祐：是的。在所有这些不同类型的数学的最底层，存在一个永恒的问题或使命，那就是“无穷”。无论有意识还是无意识，数学家所做的工作都是对无穷的“有限化处理”。计算机无法处理无穷的东西，无论计算机多么先进、速度多么快，都无法计算无穷。但这正是数学家的工作：构建一个模型。这个模型可能无法与原始现象完全匹配，但它能帮助你理解原始现象，而且这个模型是有限的——你可以把它输入计算机，计算机至少能为这个模型计算出精确的答案。所以数学家给了无穷一个有限的形状，或者说一种可以有限计算、可以理解的形式。

这是人类本性中一个非常有趣的特质。在我看来，人类与其他动物的不同之处在于，人类拥有“无穷”的概念——他们从未见过无穷，从未经历过无穷，甚至宇宙可能也不会无限存在，但人类无法没有无穷的概念而生存。

《通讯》：您认为没有不行吗？

广中平祐：是的。这也是人们创造宗教的原因——宗教说世界比你一生所能触及的更漫长，宇宙比你想象的更广阔，这样你就会感觉好一些。无穷就像一种信仰，如果你相信无穷或永恒，就会感到更幸福。

《通讯》：这其中有一种满足感，仿佛让世界变得完整了。

广中平祐：没错。我认为其他动物不会有这样的感受。我觉得人类许多其他动物无法做到的文化和智力活动，都与“无穷”这一特质有关。但同时，当你真正理解某件事，并能实际计算、运用它来创造实际产品时，一切又都是有限的——如果是无穷的，你就无法做任何事情。人类无法做、无法创造、无法规划无穷的东西。人类有两只手：一只手触摸无穷，另一只手扎根于有限的现实世界。我认为数学家真正的任务，就是以某种方式将这两者连接起来。